

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, județul Timiș
7.02.2025

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

1. Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $abc = 1$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{ab(c^2+1)} + \frac{1}{bc(a^2+1)} + \frac{1}{ac(b^2+1)} \leq \frac{3}{2}$;

b) Calculați valoarea expresiei $E = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$.

Soluție:

a) $\frac{1}{ab(c^2+1)} + \frac{1}{bc(a^2+1)} + \frac{1}{ac(b^2+1)} =$
 $\frac{abc}{ab(c^2+1)} + \frac{abc}{bc(a^2+1)} + \frac{abc}{ac(b^2+1)} = \frac{c}{c^2+1} + \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1}$ 1p

Din inegalitatea mediilor $\frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{b}{b^2+1} \leq \frac{1}{2}$ și $\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}$ 1p

Finalizare $\frac{1}{ab(c^2+1)} + \frac{1}{bc(a^2+1)} + \frac{1}{ac(b^2+1)} \leq \frac{3}{2}$ 1p

b) $E = \frac{a}{ab+a+abc} + \frac{b}{bc+b+abc} + \frac{c}{ac+c+abc} = \frac{1}{b+1+bc} + \frac{1}{c+1+ac} + \frac{1}{a+1+ab}$ 1p

$E = \frac{abc}{b+abc+bc} + \frac{abc}{c+abc+ac} + \frac{abc}{a+abc+ab} = \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{bc}{1+bc+b}$ 1p

$3E = \frac{c+1+ac}{1+ac+c} + \frac{a+1+ab}{1+ab+a} + \frac{b+1+bc}{1+bc+b}$ 1p

$3E = 3 \Rightarrow E = 1$ 1p

2. Arătați că $24\sqrt{2} \leq \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35$ pentru orice numere reale $x \in [2, 3]$ și $y \in [3, 4]$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2024

Soluție:

$\left(x + \frac{6}{x}\right) \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 2\sqrt{6}$ 1p

$\left(y + \frac{12}{y}\right) \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{12}{y}} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ 1p

$$\left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \geq 8\sqrt{18} = 24\sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$x + \frac{6}{x} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x} + 5 = \frac{(x-2)(x-3)}{x} + 5 \dots\dots\dots 1p$$

$$y + \frac{12}{y} = \frac{y^2 - 7y + 12}{y} + 7 = \frac{(y-3)(y-4)}{y} + 7 \dots\dots\dots 1p$$

$$x \in [2, 3] \Rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \Rightarrow x + \frac{6}{x} \leq 5 \dots\dots\dots 1p$$

$$y \in [3, 4] \Rightarrow (y-3)(y-4) \leq 0 \Rightarrow y + \frac{12}{y} \leq 7 \Rightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35 \dots\dots\dots 1p$$

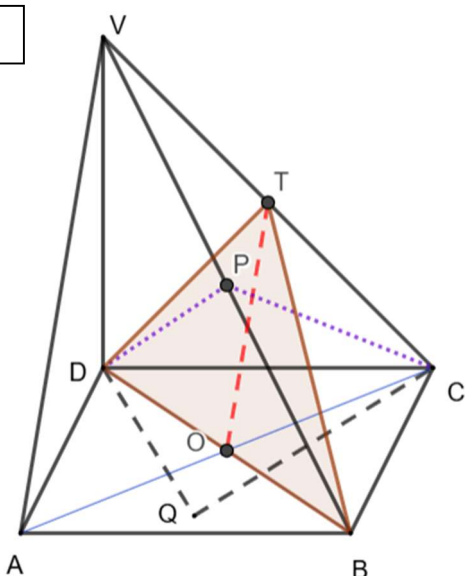
3. În vârful D al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara VD pe planul dreptunghiului. Bisectoarea $\sphericalangle ADC$ intersectează bisectoarea $\sphericalangle DCB$ în Q . Fie T și P respectiv mijloacele segmentelor CV și BV , iar M și N centrele de greutate ale triunghiurilor VAD , respectiv ADQ . Arătați că:

- $VA \parallel (TBD)$;
- Triunghiul PDC este isoscel;
- $MN \perp CQ$.

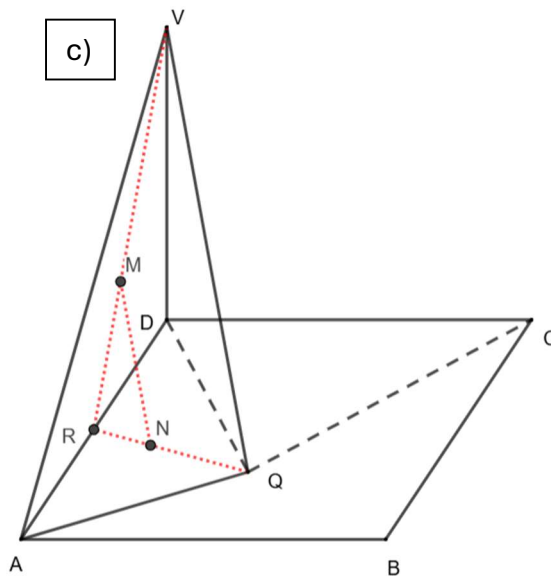
Soluție:

- Notăm $AC \cap BD = \{O\}$.
 TO este linie mijlocie în $\triangle ACV$ 1p
 $TO \parallel VA, TO \subset (TDB) \Rightarrow VA \parallel (TBD)$ 1p
- $VD \perp (ABC) \Rightarrow \triangle VDB$ – dreptunghic, DP este mediană $\Rightarrow DP = \frac{1}{2}VB$ 1p
 $VD \perp (ABC), DC \perp BC, DC, BC \subset (ABC)$, conform T3 $\perp \Rightarrow CV \perp CB \Rightarrow \triangle VBC$ – dreptunghic, CP este mediană în $\triangle VBC \Rightarrow CP = \frac{1}{2}VB$. Deci, $CP \equiv DP \Rightarrow \triangle PDC$ este isoscel. 1p

a); b)



c)



- $VD \perp (ABC), DQ \perp QC, DQ, QC \subset (ABC)$, conform T3 $\perp \Rightarrow QV \perp CQ$ 1p
 Notăm R mijlocul segmentului AD .

În $\triangle VAD$ avem $\frac{RM}{RV} = \frac{1}{3}$, în $\triangle ADQ$ avem $\frac{RN}{RQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{RM}{RV} = \frac{RN}{RQ}$ 1p

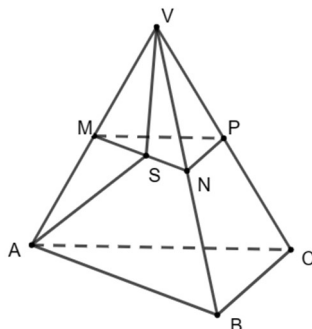
Aplic T. reciprocă Thales în $\triangle RVQ \Rightarrow MN \parallel VQ$ și cum $QV \perp CQ \Rightarrow MN \perp CQ$ 1p

4. Se consideră tetraedrul $VABC$ și punctele M , N și P mijloacele muchiilor VA , VB , respectiv VC .

a) Arătați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.

b) Dacă S este piciorul perpendicularei din V pe bisectoarea unghiului VAB , demonstrați că punctele M, N, P și S sunt coplanare.

Soluție:



a) MN linie mijlocie în $\triangle VAB \Rightarrow MN \parallel AB$, dar $AB \subset (ABC) \Rightarrow MN \parallel (ABC)$ 1p

NP linie mijlocie în $\triangle VBC \Rightarrow NP \parallel BC$, dar $BC \subset (ABC) \Rightarrow NP \parallel (ABC)$ 1p

Cum $MN \parallel (ABC)$, $NP \parallel (ABC)$, $MN, NP \subset (MNP)$, $MN \cap NP = \{N\}$

$\Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$ 1p

b) Cum $VS \perp AS \Rightarrow \triangle VSA$ dreptunghic, $\sphericalangle VSA = 90^\circ$, dar SM mediană $\Rightarrow SM = \frac{VA}{2}$ 1p

$SM \equiv MA \Rightarrow \triangle MSA$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle MSA \equiv \sphericalangle MAS$, $\sphericalangle MAS \equiv \sphericalangle SAB \Rightarrow \sphericalangle MSA \equiv \sphericalangle SAB$ 1p

$\sphericalangle MSA, \sphericalangle SAB$ unghiuri alterne interne congruente $\Rightarrow MS \parallel AB$ 1p

Cum $MS \parallel AB$ și $MN \parallel AB \Rightarrow S \in MN \Rightarrow S \in (MNP) \Rightarrow$ punctele M, N, P și S sunt coplanare 1p